

以建模分析 试辨官渡之战“以少胜多”

中国科学院大学人文学院博士研究生 邵 鹏

中国科学院大学人文学院博士研究生、国防大学军事管理学院讲师 余永阳

官渡之战是曹操统一北方、奠定基业，进而在三国争霸中成为最强集团的关键战役，不论是正史《三国志》还是小说《三国演义》都描述了这场战争，而且也都将这场战争说成“以少胜多”“以一敌十”的经典战例。《三国志》中体现双方实力悬殊的有这样一段记载：“八月，绍连营稍前，依沙埽为屯，东西数十里。公亦分营与相当，合战不利。时公兵不满万，伤者十二三。”^[1]

然而，对于《三国志》的记述，后人不断提出质疑。裴松之在注中提了三点：

第一，袁绍屯兵数十里，曹操能够应对，兵力不会少；

第二，袁绍如果十倍兵力于曹操，应该合围曹操，反而被其主动出击；

第三，曹操坑杀了袁绍七八万人，人少是不可能实现的。

《三国志》的记载不甚明确，可能只是官渡之战中某一次战斗的人员对比。裴注所提出的质疑也是有理有据。

那么，官渡之战究竟是不是一场“以少胜多”甚至“以一敌十”的战争？

史学家对此历来有所争论，有的对战争胜败进行分析，^[2]有的对曹操的兵力进行考察。^[3]虽然在数量说法各不同，但大都不支持“以一敌十”的说法。关于曹军人数，史书中没有记载准确数字或提供直接证据。但是土地、粮食、人口以及军事力量等衡量国家综合实力的指标，可以帮助推断出曹军的大致兵力，而对此鲜有前人研究涉及。

对史料挖掘和考察是传统历史研究的重要方法，随着近年科学发展，用数学模型对战争或历史事件进行定量研究已不鲜见，如用“博弈论”的模型分析李广的百骑解

[1] 陈寿：《三国志》卷1《魏书·武帝纪》，中华书局，2006年，第12页。本文所引《三国志》均为中华书局2006年版本，后文不再一一标注。

[2] 朱绍侯：《官渡之战和赤壁之战双方胜败原因试探》，《河南大学学报（社会科学版）》2015年5期。

[3] 杨巨中：《官渡之战中曹军兵力考》，《军事历史》2000年6期。

围和诸葛亮的空城计,^[1]定量描述中国古代区域性虎患频次、烈度和时空分布等。^[2]而其中,兰彻斯特方程是一种较为成熟的模拟战争的常用方法。

基于以上,本文在考察历史文献、推算官渡之战曹军兵力基础上,尝试用兰彻斯特方程仿真官渡之战过程中双方兵力变化,进而对这场战争中曹军的兵力规模进行估算,以此也算用历史定性研究与模型定量分析相结合的手段,对古代史研究作些尝试。

史料考察

(一) 经济背景

土地、粮食和人口是古代国力强弱的重要指标。土地承载着食物、居住空间、战略防御纵深等资源,^[3]影响着军队兵员的数量。官渡之战前曹操所拥有的土地面积和质量,并不逊于袁绍。

土地面积方面,袁绍当时拥有河北幽、冀、并、青四州,是当时最强大的割据势力。曹操本来据有兖州、豫州,建安二年(公元197年)战胜袁术,袁术逃到淮南。官渡战前孙策新亡,孙权还未形成气候,曹操得以控制扬

州的部分地区。建安三年(公元198年)曹操战胜割据徐州的吕布,夺得徐州,之后刘备反叛曹操短暂占领徐州(公元199年12月),但是在官渡战前又被曹操收复(公元200年1月)。建安三年李傕被部将所杀,曹操上表钟繇为司隶校尉,相当于控制了关中地区。建安四年(公元199年)宛城军阀张绣投降曹操。所以,官渡之战前,曹操拥有兖、豫、徐三州,扬州的一部分以及关中地区,单纯从地域面积上大于袁绍。

累月经年的战乱使得民生凋敝。为此,曹操自建安元年(公元196年)实行屯田制,极大地增强经济实力,为作战奠定了经济基础。

《三国志》记载:“是岁(建安元年)用枣祗、韩浩等议,始兴屯田。”^[4]注引《魏书》对这句话进行了解释:

自遭荒乱,率乏粮谷。诸军并起,无终岁之计……公曰:“夫定国之术,在于强兵足食,秦人以急农兼天下;孝武以屯田定西域,此先代之良式也。”是岁,乃募民屯田许下,得谷百万斛。于是州郡例置田官。^[5]

《资治通鉴》对此也有记载:

中平以来,天下乱离,民弃农业,诸军并起,率乏粮谷,无终岁之计……羽林监枣祗请建置屯田,曹操从之,以祗为屯田都尉,以骑都尉任峻为典农中郎将,募民屯田许下,得谷百万斛。于是州郡例置田官,所在积谷,仓廩皆满。故操征伐四方,无运粮之劳,遂能兼并群雄。军国之饶,起于祗而成于峻。^[6]

以上记载均反应了屯田的重要意义,同时表现出曹操因屯田而获得的巨大优势。“得谷百万斛”“所在积谷,仓廩皆满”这样的描述,都体现出曹操不用担心军粮的问题。如果“百万斛”^[7]的说法为真,根据当时的度量,可供1万军队食用4年多。官渡之战曹军在与袁军相持了半年多才出现粮食危机,从这个角度可以推测,曹军数量至少有8万人。

依当时看,黄河以北的冀州比黄河以南的中原地区殷实富足。虽然曹操经过几年屯田经济条件有所改善,但仍然不能和河北地区相比。至今未见史书记载袁军有什么粮食危机,反而还曾大规模运输粮草,因此虽然曹操的屯田制为自己赢得了与袁绍一战的机会,但是单纯在粮食的绝对值

[1] Cotton C, Liu C. 100 Horsemen and the empty city: A game theoretic examination of deception in Chinese military legend. Journal of Peace Research, 2011, 48(2): 217-223.

[2] 曹志红:《老虎与人:中国虎地理分布和历史变迁的人文影响因素研究》,陕西师范大学,2010年,第141—156页。

[3] 邵鹏、陈天嘉、任定成:《三国叙事中的领地行为与资源占有》,《自然辩证法研究》2016年12期。

[4] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》,第9页。

[5] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》注引《魏书》,第9页。

[6] 司马光:《资治通鉴》第1卷,中华书局,2007年,第727—728页。

[7] 斛:中国旧量器名,亦是容量单位。唐代以前,1斛约等于120斤。

方面曹操并不占有劣优势。

人口方面,根据《后汉书·郡国志》记载,袁绍所占青、冀、幽、并四州总户数约为200万(不计公孙氏所占辽东等郡),人口约850万;曹操所占的司、豫、兖、徐四州的总户数为390万,人口约1800万,这是汉时统计,曹操占领区比袁绍占领区高出一倍。但是汉末诸侯并起、战争频发,袁绍所占据的黄河以北地区不是主要战场,人口损耗不如曹操所占据的中原地区剧烈。并州几乎没有遭到破坏,幽州经刘虞务农植谷、招抚流亡,人口十分殷实。因此袁绍占领区人口损耗按半数计算仍有400多万。曹操占领的中原地区,受战乱影响最为剧烈,东至陈留南至颍川,“数百里中无烟火”^[1];徐州久经战祸,“所过多所残戮”^[2];“江淮间空尽,人民相食”^[3]。曹操占领区人口损耗严重,“是时天下户口减耗,十裁一在”^[4],以减少十分之二计算,有300多万口,略少于袁绍占领区的人口。

综合分析,在土地面积方面,曹操略占优势;粮食产量和人口方面,曹袁相差不多,曹操虽略

逊于袁绍,但具备和袁绍抗衡的基础。

(二) 曹操的军队发展

客观上说,土地、粮食和人口只是一国的战争基础,相当于动物行为学中资源占有潜力,即控制有价值资源的潜力。^[5]这些对战争起着十分重要的支撑。而军事力量是直接的战争实力,决定着战争的胜负。冷兵器时代,由于敌对双方通常不存在武器装备的“代差”,因而衡量战争实力往往通过兵将的数量和质量,军队的数量是决定战争胜负的关键因素。

回顾曹操在军队的发展史,他在中平六年(公元189年)起兵讨伐董卓,《三国志》注引《世语》记载:“陈留孝廉卫兹以家财资太祖,使起兵,众有五千人。”^[6]即曹操起兵时有一支5000人的部队。不久汴水一战被董卓部将徐荣大败,曹操被乱箭击中,骑曹洪的马才得以逃命。后来曹操带夏侯惇到扬州募集了400多人,到铄和建平又得到1000多人。初平三年(公元192年),曹操在鲍信的帮助下成为兖州刺史,并在与黄巾的战斗中取得巨大胜利,

受降30万黄巾军,《三国志》记载:“追黄巾至济北。乞降。冬,受降卒三十餘万,男女百餘万口,收其精锐者,号为青州兵。”^[7]这些青州兵都是身经百战的悍匪,战斗力很强。

建安元年(公元196年),曹操又一次打破黄巾,《三国志》记载:“汝南、颍川黄巾何仪、刘辟、黄邵、何曼等,众各数万,初应袁术,又附孙坚。二月,太祖进军讨破之,斩辟、邵等,仪及其众皆降。”^[8]虽然这段记述中没有提及具体数字,但是黄巾4位将领“众各数万”,总数应在4万到10万之间,曹操经过这次战役再一次大规模扩充了自己的军事力量。

建安三年(公元198年)曹操在下邳战胜吕布,收降了侯谐、宋宪、魏续、臧霸、孙观等部。其中以臧霸为首的“泰山诸将”,带领的“泰山兵”也是当时的一支劲旅,因此臧霸等人投降后受到曹操的厚待,《三国志》对其描述是:“布败,获霸等,公厚纳待,遂割青、徐二州附於海以委焉,分琅邪、东海、北海为城阳、利城、昌虑郡。”^[9]

[1] 陈寿:《三国志》卷46《吴书·孙破虏讨逆传》,第651页。

[2] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》,第7页。

[3] 陈寿:《三国志》卷6《魏书·董二袁刘传》,第128页。

[4] 陈寿:《三国志》卷8《魏书·二公孙陶四张》,第160页。

[5] 陈天嘉,任定成:《争斗策略的理论模型和经验验证》,《生物学通报》2010年12期。

[6] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》注引《世语》,第4页。

[7] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》,第6页。

[8] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》,第8页。

[9] 陈寿:《三国志》卷1《魏书·武帝纪》,第10页。

建安四年（公元199年），曹操战胜眭固，眭固的部将薛洪、繆尚率其部队投降，而眭固的军事力量最初是属于河内太守张扬的。建安五年（公元200年），庐江太守刘勋带领部队投降曹操。

自中平六年到建安五年这10年左右的时间，曹操将一支5000人的队伍迅速扩大到至少40万人。曹操当时在四面八方都有敌人需要应对，因此这些军队不能全部投入对袁绍的战争中，但曹操具备派出与袁绍相当数量军队的能力。

（三）曹军主要将领的兵士数量

通过分析曹操主要将领的传记，在记述官渡之战的内容中都直接或间接的提到了所率领兵士的数量，借此可以推测曹操在这次战争中投入的军力。根据《三国志》记载，曹操手下参与官渡之战的重要将领有14位，分别为夏侯渊、曹仁、曹洪、乐进、于禁、徐晃、李典、李通、臧霸、许褚、任峻、关羽、张辽、张绣。在这些人的传记当中明确提到兵士数量的是将领于禁，可通过他的传记为线索来推测其他各位将军的兵力。

《三国志》记载：

太祖初征袁绍，绍兵盛，禁原为先登。太祖壮之，乃遣步卒二千

人，使禁将，守延津以拒绍，太祖引军还官渡。刘备以徐州叛，太祖东征之。绍攻禁，禁坚守，绍不能拔。复与乐进等将步骑五千，击绍别营，从延津西南缘河至汲、获嘉二县，焚烧保聚三十馀屯，斩首获生各数千，降绍将何茂、王摩等二十余人。^[1]

从这里看于禁和乐进共同掌控的部队有5000人。《三国志》卷十七《张乐于张徐传》的最后曾有这样的评价：“太祖建兹武功，而时之良将，五子为先。”^[2]可见张辽、乐进、于禁、徐晃、张郃为曹操最重要的5位将领，张郃在官渡之战后归附曹操，之前4位将军都在官渡之战中为曹操立下汗马功劳。张辽“数战有功，迁裨将军，袁绍破，别遣辽定鲁国诸县。”^[3]徐晃“从破刘备，又从破颜良，拔白马，进至延津，破文丑，拜偏将军。与曹洪击灏疆贼祝臂，破之，又与史涣击袁绍运车於故市，功最多，封都亭侯。”^[4]通过对这二位的描述可以推测，张辽作为曹操五大将之首，统兵数量不会低于于禁和乐进。徐晃参与了官渡之战几乎全部的重要战争，建功最多，因此掌握的军队数量可能多于张辽。这四位将军所控制的军队可能接近15000人。此外关羽虽是降将，但是深得曹操

器重，而且在官渡之战开战之初就斩杀敌方大将颜良，立下大功，因此关羽统帅的部队应与以上4位将军接近。

曹仁、曹洪、夏侯惇、夏侯渊都是曹操的宗亲，曹操起家时就是和夏侯惇一起募兵，以后的武装都是在这个基础上发展起来的。曹氏和夏侯氏的将军是曹操最为倚重的，因此他们手中的部队数量不会低于以上4位将军。台湾三军大学编著的《中国历代战争史（四）·三国时期》汇总了各种历史材料，认为夏侯惇率领步兵5000人镇守敖仓和孟津。^[5]以此推断这4位宗亲将军的部队共约2万人。

许褚带领近卫军保卫曹操，深得曹操信任。《三国志》记载：“从讨袁绍於官渡。时常从士徐他等谋为逆，以褚常侍左右，惮之不敢发……太祖益亲信之，出入同行，不离左右。”^[6]由于许褚跟随曹操，保卫主公的同时进行一些军事活动，因此自己所辖的军队应该不如以上几位将军。

张绣在官渡战争之前才听取贾诩的建议归附曹操，《三国志》记述：“绣至，太祖执其手，与欢宴，为子均取绣女，拜扬武将军。官渡之役，绣力战有功，迁破羌将军。”^[7]张绣在归附曹操之前已经是一个有

[1] 陈寿：《三国志》卷17《魏书·张乐于张徐传》，第314页。

[2] 陈寿：《三国志》卷17《魏书·张乐于张徐传》，第319页。

[3] 陈寿：《三国志》卷17《魏书·张乐于张徐传》，第311页。

[4] 陈寿：《三国志》卷17《魏书·张乐于张徐传》，第317页。

[5] 台湾三军大学：《中国历代战争史》第4卷，军事译文出版社，1983年，第1086页。

[6] 陈寿：《三国志》卷18《魏书·二李臧文吕许典二庞阎传》，第325页。

[7] 陈寿：《三国志》卷8《魏书·二公孙陶四张传》，第160页。

一定势力的割据军阀，而且曾经在与曹操的战争中重创过曹操，因此其兵力不容小觑。加之他归附时曹操所表现出的兴奋态度，可见他在官渡战前的关键时刻为曹操送来一支规模可观的军事力量，可能在5000人以上。

臧霸也是降将，且手握名为“泰山兵”的劲旅，同样受到了曹操的厚待。曹操将青、徐两地的事物交给臧霸，作为重要的战略右翼，他统辖的军队应该不下1万余。

李通在官渡之战时镇守汝南以防孙氏，在这个过程中还遭到策反，《三国志》记载：

太祖与袁绍相拒於官渡。绍遣使拜通征南将军，刘表亦阴招之，通皆拒焉。通亲戚部曲流涕曰：“今孤危独守，以失大援，亡可立而待也，不如亟从绍。”通按剑以叱之曰：“曹公明哲，必定天下。绍虽强盛，而任使无方，终为之虏耳。吾以死不贰。”即斩绍使，送印绶诣太祖。^[1]

遭到策反说明收到了敌方重视，因此李通所率领的守军应该至少也有1万人。

以上几位将军的部队相加大概有将近7万人，再加上史书中没有明确记载的将领，曹军的总

数可能有8万，而且《三国志》描述了这样一个细节：“太祖在官渡，与袁绍相持，繇送马二千馀匹给军。”^[2]这只是钟繇在西北提供的战马，曹操的骑兵数量可能不仅如此。据此推断参与官渡之战的曹军步兵骑兵总数应该超过8万人。

李典和任峻都是负责后勤的将领。其中李典负责谷帛，任峻负责运送军粮。《三国志》中关于运送军粮记载可以从另一个侧面推测曹军的数量：“官渡之战，太祖使峻典军器粮运。贼数寇钞绝粮道，乃使千乘为一部，十道方行，为复陈以营卫之，贼不敢近。”^[3]一“部”是1000辆运粮车，根据任峻传的描述每次不止一部，可见运粮车的数目很多，因此军队的规模应该也有几万人^[4]。

综上所述，从文献角度分析，不论是经济、军队发展，还是将领的兵士数量方面，曹操都有可能派出接近8万人的军队参加官渡之战，而不是“不满万”。史书中的得出这个结论或是仅仅描述了某一场战役的人数比，或是用这种夸张的写法侧面赞美曹操。不论出于何种目的，都和文献中体现的历史情形不相符。

下文试通过建立微分方程来

模拟官渡之战时的人数变化，用一个新的视角来考察这个历史问题。

一种基于微分方程模拟军队数量变化的方法

人类社会生活变迁是一个连续变化、渐进演化的过程。在自然科学领域，科学家常常用微分方程来模拟各种现象随时间推移而连续发生的变化。这样做的原因不是这些现象呈现出来的变化过程与社会政治变迁存在本质差异，而是科学家想用微分方程模型来更好地模拟在真实世界中发生的现象随时间连续变化的本质。^[5]微分方程在物理、化学、工程等领域都有应用。

社会科学家也研究变迁，且有一些非常值得注意的用微分方程来模拟变迁过程的例子，比如兰彻斯特方程。1914年，兰彻斯特(F. W. Lanchester)引入了一组耦合的常微分方程，现在通常称为兰彻斯特方程(LE)，将它作为现代战争的损耗模型。^[6]这个方程形式上等价于用来模拟捕食者—猎物种群交互动态性的Lottka-Volterra方程式。^[7]LE后来用作一种基本的数学模型，大多现代作战损耗理论都是基于这个模型。

[1] 陈寿：《三国志》卷18《魏书·二李臧文吕许典二庞阎传》，第321页。

[2] 陈寿：《三国志》卷13《魏书·钟繇华歆王朗传》，第239页。

[3] 陈寿：《三国志》卷16《魏书·任苏杜郑仓传》，第295页。

[4] 杨德炳：《官渡之战相持阶段曹军兵力考》，《襄樊学院学报》2008年29卷10期。

[5] 考特尼·布朗，李兰：《微分方程：一种建模方法》，上海人民出版社，2012年，第2页。

[6] Lanchester F.W. Aircraft in Warfare, Lanchester Press, 1995.

[7] Hofbauer J. and K. Sigmund. Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge University Press, 1988.

LE 很直观,易于应用,用数学术语表示, t 表示战斗时刻, $m(t)$ 、 $n(t)$ 表示战斗开始后在 t 时刻蓝方、红方在战斗中剩存的战斗单位数量, α 、 β 分别表示蓝方、红方在单位时间内每一战斗单位杀伤对方战斗单位的比例,即战斗力系数。兰彻斯特方程可表示为:

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\alpha m(t) \quad \frac{dm(t)}{dt} = -\beta n(t)$$

这个方程可以推导出:
 $(m_0^2 - m(t)^2) = (n_0^2 - n(t)^2)$ 。
 m_0 、 n_0 是蓝方、红方的初始战斗数量。

官渡之战当中的兵士数量是随着战争进行而变化的,因此可以用兰彻斯特方程对官渡之战双方兵力的变化进行建模。有学者尝试过这类方法,但是所采用的数据部分来自《三国演义》。^[1]小说由于情节需要不免虚构和夸张,不宜用做历史研究的证据,因此本文在赋值过程中全部采用《后汉书》《三国志》《资治通鉴》等正史记载。根据官渡之战的兵士损耗主要存在于常规军事行动(正面战争)和非常规军事行动(奇袭)中。设士兵损失率为 X , 常规军事行动损失率为 X_1 , 非常规的军事行动的损失率为 X_2 。规定最小时间单位 t 为天。袁军兵力随时间变化函数为 $x(t)$, 曹军兵力随时间变化函数为 $y(t)$, 建立方程如下:

$$\frac{dx}{dt} = -X_1 - X_2$$

在常规军事行动中,己方士兵损失率 X_1 与对方军队士兵数成正比:
 $X_1 = \text{战争资源系数}(A) \times \text{军事能力系数}(a) \times \text{对方参战士兵数量}$

$A = \text{本方主帅对资源利用的情况} / \text{双方资源总和}$

$a = \alpha \times \text{武将能力值} + (1 - \alpha) \times \text{士兵能力值}$

战争资源包括当时双方所占有的土地面积、人口、经济状况、政权稳定程度等等。根据上文的分析,袁绍在资源储备方面优于曹操,但据史料记载,曹操在战争动员方面强于袁绍,因此在战争资源系数方面双方相差不多,因此战争资源系数比为:

袁军:曹军 = 0.5:0.5。

表 1 根据文献记载为参与官渡之战的全部武将分别赋予一个能力值(满分 10)。武将在战争中的作用要强于一般士兵,因此将军事能力系数 α 赋值为 0.6。

由于曹军的组成中有青州兵和泰山兵,作战能力略强于袁军,可以据此假设士兵能力的比值为:

袁军:曹军 = 0.4:0.6。

在非常规军事行动中,由于谋士设计了某种计谋,采用非常规方式(如偷袭)对对方造成了打击。己方士兵损失率 X_2 与对方参与战队士兵数量($k \times$ 对方参战总数, k 为参与偷袭战的比例系数, $0 \leq k \leq 1$)和己方被袭击士兵数量的乘积成正比:

$X_2 = \text{计谋能力系数}(B) \times \text{己方士兵数} \times \text{对方参与士兵数量}$

$B = \beta \times \text{主将决策水平值} + (1 - \beta) \times \text{文臣能力值}$

主将在计谋的实施过程中有重要的决策作用,因此 β 赋值为 0.6。官渡之战中曹操的战略战术选择能力、战场指挥能力等都胜袁绍一筹,因此假设其主将决策水平系数比值为:

袁绍:曹操 = 0.3:0.7

表 1 根据《三国志》记载为参与官渡之战的全部武将文臣分别赋予能力值(满分 10),能力值的差别体现在武将参与的事件数量以其在事件中文字描述出来的重要程度。

根据表 3 的数值,得到官渡之战的微分方程模型为:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -0.5 \left(0.6 \times \frac{71}{108} + 0.4 \times 0.6 \right) y + \left(0.6 \times 0.7 + 0.4 \times \frac{44}{84} \right) x \times ky \\ &= -0.38y - 0.62kxy \\ \frac{dy}{dt} &= -0.5 \left(0.6 \times \frac{37}{108} + 0.4 \times 0.4 \right) x \\ &= -0.25x \end{aligned}$$

$$x(0) = 100000, y(0) = 20000$$

[1] 梅正阳:《数学模型下的官渡之战曹操兵力考》,《大学数学》2016年2期。

官渡之战双方武将能力值（表1）					
曹 操			袁 绍		
姓名	事件	得分	姓名	事件	得分
夏侯惇	守敖仓、孟津	5	颜良	攻白马被关羽斩杀	6
夏侯渊	督运兗、豫、徐州军粮	4	文丑	攻延津被斩杀	6
曹仁	①击破刘备和濡疆贼 ②与史涣第一次烧袁绍军粮	6	刘备	偷袭许都被曹仁击败	5
曹洪	偷袭乌巢时留守大营	5	韩猛	第一次运送粮草被偷袭	4
乐进	斩绍将淳于琼	4	淳于琼	督运粮草在乌巢被偷袭	4
于禁	①守延津 ②相持阶段督守土山，振奋士气	5	张郃	曹挑战袭乌巢时建议增援，但是未被采纳，只能攻曹营，后投降曹操	6
徐晃	①东征刘备 ②破颜良、文丑 ③与曹洪击濡疆贼祝臂 ④与史涣击袁绍运车於故市	7	高览	与张郃一同攻曹营	6
李典	提供粮草、衣服	4			
李通	拒绝刘表劝降，使得南方无忧	3			
臧霸	守青州，使得东方无忧	3			
许褚	保护曹操	5			
任峻	负责兵器制造和运送粮草	4			
关羽	白马之战斩杀颜良	6			
张辽	参与白马之战	6			
张绣	归附曹操，提升曹方战力	4			
总计		71			37

官渡之战双方文臣能力值（表2）					
曹 操			袁 绍		
姓名	事件	得分	姓名	事件	得分
郭嘉	①十胜论，分析敌我形势 ②建议战前先平定吕布	7	田丰	①不建议伐曹（未听取） ②战前曹操打刘备时建议偷袭曹操后方（未听取）	7
荀彧	曹操欲退军，上书制止，曹操接受建议，迎来转机	7	沮授	①白马之战不建议派出颜良（未听取） ②建议持久战（未听取） ③最后一次运粮草时为防止曹操偷袭建议增加一支护卫队（未听取）	7
荀攸	①设计斩杀颜良、文丑 ②献计第一次烧袁绍军粮 ③信任许攸，建议偷袭乌巢 ④信任张郃，接受其降	7	崔琰	不建议伐曹（未听取）	5
贾诩	建议张绣归附曹操，提升曹方战力	6	郭图	①支持伐曹 ②曹操偷袭乌巢时建议攻击曹营	5
钟繇	①安抚马腾、韩遂，使得西北无忧 ②相持阶段提供两千多匹马	5	审配	支持伐曹	5
程昱	守住鄄城，使得东北无忧	5	逢纪	兵败后诬陷田丰	3
许攸	建议偷袭乌巢	7	许攸	①突袭许都（未听取） ②因犯法怕被审配加害，投降曹操	5
			陈琳	讨伐曹操檄文	3
总计		44	总计		40

模型参数(表3)

曹 操			袁 绍		
参数	意义	数值	参数	意义	数值
$x(0)$	袁军初始兵力	100000	$y(0)$	曹军初始兵力	20000
AX	战争资源系数	0.5	Ay	战争资源系数	0.5
	武将能力值	71/108		武将能力值	37/108
	士兵能力值	0.6		士兵能力值	0.4
B	主将决策水平值	0.7	B	主将决策水平值	0.3
	文臣能力值	44/84			40/84
	参加偷袭战人数	5000			

此方程根据“以少胜多”的描述,袁军的起始兵力设为10万人,曹军的起始兵力设为2万人,这是一个比较悬殊的比例。用MATLAB编程求解后,曹军的数量随时间的增长而逐渐减少,直至趋近于0,即输掉战争(见图1)。调整方程除起始兵力外的其他参数,只会改变曹军随时间减少的幅度,并不能改变战争的结果。也就是说根据这个方程,曹操以

如此少的兵力是没有可能赢得战争胜利的。

但当增加曹军起始兵力之后,战争的结果开始发生变化,当起始兵力增长到6万以后,袁军的数量开始减少,并逐渐到0(见图2)。随着起始兵力的增加,袁军数量减少的幅度开始加快。

通过图1可以发现,尽管在士兵能力和主将决策水平方面曹操优于袁绍,但倘若军队的绝对

数量差别太大,士兵能力和主将决策水平并不能左右战局。图2中军队绝对数量曹操和袁绍的差距已经变小,当达到6万人时,在士兵能力和主将决策水平依然优于袁绍的前提下,战争结果才发生转变。通过反复试验,曹操兵力低于袁军六成时几乎无胜算,一旦超过六成,且在其他参数占优时,才可能取得战争的胜利。因此,曹军“不满万”并不可信,但稍少于袁军是可能的,这也与历史上描述的“以少胜多”相符。

综上所述,兰彻斯特方程可以对冷兵器时代战争的军队数量变化做近似的模拟。尽管对于方程的赋值大多是根据史书中定性的描述,无法给出精确的数值关系,但是用这种方式至少可以从一个方面说明曹操的兵力与袁绍并非十分悬殊。(编辑:王浩然)○

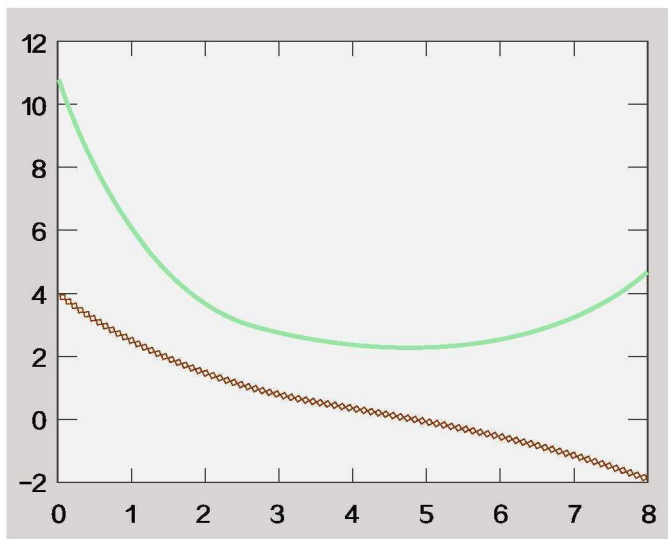


图1 初始兵力悬殊时双方根据时间的兵力变化

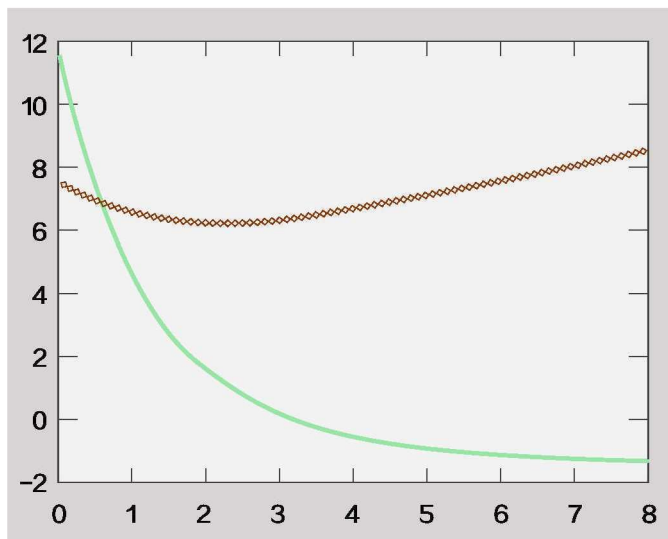


图2 初始兵力差别减少后双方根据时间的兵力变化